

# Control 2 MA26B Matemáticas Aplicadas

## Semestre 2004-2

7 de octubre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

**Problema 1.** a) (3 pts) Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$$i) \quad f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad ii) \quad f(z) = (z - i)\bar{z}, \quad z = x + iy$$

y calcule sus derivadas donde éstas existan.

b) (3 pts) Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Encuentre el radio de convergencia  $R$  de la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  donde  $c_k = a + 1$  si  $k$  es par y  $c_k = 1$  si  $k$  es impar. Compruebe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2} \quad \forall |z| < R.$$

Indicación. Recuerde la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$  si  $|\rho| < 1$ ,  $\rho \in \mathbb{C}$ .

**Problema 2.** (2 pts c/u) Calcule

$$a) \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz, \quad b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 + 3 \cos \theta)^2}.$$

**Problema 3.** a) Sea  $f$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con un número finito de polos tal que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p} \quad \forall |z| \geq M$$

donde  $p > 1$  y  $M, K > 0$  son constantes. Denotemos por  $z_1, \dots, z_m$  los polos de  $f$ . Supongamos además que  $z_j \notin \{k/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  para todo  $j = 1, \dots, m$  y que  $f(k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . El objetivo es probar que bajo estas hipótesis se cumple

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j). \quad (1)$$

i) (1.5 pts) Muestre que  $z_j$  es un polo de  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$  y que todo entero  $k \in \mathbb{Z}$  es un polo simple de  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$ .

ii) (1.5 pts) Para  $N \in \mathbb{N}$  sea  $\gamma_N$  el camino correspondiente al borde del cuadrado de vértices:

$$(N + \frac{1}{2})(-1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 + i), (N + \frac{1}{2})(-1 + i).$$

Demuestre que si  $N$  es suficientemente grande entonces

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| \leq \frac{\pi A K (8N + 4)}{N^p}$$

donde  $A$  es una constante independiente de  $N$  tal que  $|\cotg(\pi z)| \leq A$ ,  $\forall z \in \gamma_N$ . (Puede usar esta última afirmación sin necesidad de probarla.)

iii) (1.5 pts) Deduzca la fórmula (1).

b) (1.5 pts) Pruebe que para  $a > 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

**TIEMPO: 3 HORAS.**

# P2 - Control 2 Matemáticas

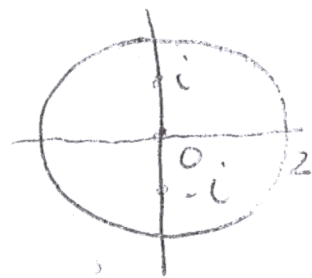
$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)} dz$$

i) Raíces de  $z(z^2+1) = z(z+i)(z-i)$

(0.5)  $P_1 = 0 \quad P_2 = i \quad P_3 = -i$

3 Polos simples

Los Residuos



(1.0)  $\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)} = 1$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)} = \frac{(-1)}{i \cdot 2i} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^{-\pi i}}{z(z-i)} = \frac{(-1)}{-i(-2i)} = \frac{1}{2}$$

(0.5)  $\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$

$$= 2\pi i \frac{5}{2} = 5\pi i$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)} dx \quad a^2 \neq 1$$

naïces  
polos de  $P(z) = (z^2+1)(z^2+a^2)$   
 $= (z+i)(z-i)(z-ai)(z+ai)$

4 polos simples

0.5  
Res  $p_1 = i \quad p_2 = -i \quad p_3 = ai \quad p_4 = -ai$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} dx = 2\pi i \left[ \text{Res}\left(\frac{1}{p}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{p}, ai\right) \right]$$

1.0

$$\text{Res}\left(\frac{1}{p}, i\right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z+i)(z^2+a^2)} = \frac{1}{2i(-1+a^2)}$$

$$\text{Res}\left(\frac{1}{p}, ai\right) = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{1}{(z^2+1)(z+ai)} = \frac{1}{2ai(1-a^2)}$$

0.5

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+a^2)} dx = 2\pi i \left( \frac{1}{2i(-1+a^2)} + \frac{1}{2ia(1-a^2)} \right)$$

$$= \pi \left( \frac{1}{(a^2-1)} + \frac{1}{a(a^2-1)} \right)$$

$$= \frac{\pi(a-1)}{a(a^2-1)} = \frac{\pi}{1+a(a+1)}$$

Decir  
~~que~~ que

$$|f(z)| \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^p} \quad p > 1$$

para algun  $M$  y  $|z| > K$  ~~en~~  $\text{Im}(z) \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta$$

1) Cambio de variables  $z = e^{i\theta}$

$$\cos \theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$dz = \frac{e^{i\theta}}{z} i d\theta$$

0.5

$$|z|=1 \quad \frac{1}{\left(5+3\frac{(z+z^{-1})}{2}\right)^2} \frac{dz}{z i}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{-4i z}{(10z+3z^2+3)^2} dz =$$

0.5 Raíces de  $p(z) = 3z^2 + 10z + 3$

$$z = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 3}}{2 \cdot 3}$$

$$z_1 = -\frac{1}{3}$$

$$z_2 = -3$$

$$= 4i \int_{|z|=1} \frac{z}{3^2 \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz$$

$$= -\frac{4i}{3^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz$$

$z_1$  = polo al interior de  $|z|=1$  (de orden 2)

$$\int_{|z|=1} \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left( \frac{z}{\left(z + \frac{1}{3}\right)^2 (z+3)^2}, z_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Res}\left(\frac{z}{(z+3)^2(z+\frac{1}{3})^2}, -\frac{1}{3}\right) \\
 &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{(z+3)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{(z+3)^2 - 2(z+3)z}{(z+3)^4} \\
 &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{z+3-2z}{(z+3)^3} = \frac{-(-\frac{1}{3})+3}{(-\frac{1}{3}+3)^3} = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{8^3}{3^3}} = \frac{10}{8^2}
 \end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{z}{(z+1)^2} dz$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \frac{1}{(5+3\cos\theta)^2} d\theta = -\frac{4i}{3^2} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z+\frac{1}{3})^2(z+3)^2} dz \\
 &= -\frac{4i}{3^2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{10}{8^2} = \frac{\pi \cdot 10}{8^2} = \frac{5\pi}{32}
 \end{aligned}$$

①

### P3. Control 2.

i/ Supongamos que  $z_j$  es un polo de orden  $m$  de  $f$

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow z_j} \pi \operatorname{ctg}(\pi z) \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m f(z)$$

Como  $z_j$  es un polo de orden  $m$  de  $f$ , por definición

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^m f(z) \text{ existe y no es nula.}$$

Además como  $z_j \notin \{ \frac{h}{2} / h \in \mathbb{Z} \}$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_j} \pi \operatorname{ctg}(\pi z)$  existe

y no es nula.

Estos dos resultados prueban  $z_j$  es un polo de  $\pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z)$

$$\lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow k} f(z) \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \operatorname{ctg}(\pi z).$$

$$\lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z}$$

$$= \pi \cos \pi k \lim_{z \rightarrow k} \frac{1}{\pi \cos \pi z} \quad (\text{h\^o pital})$$

$$= 1$$

$\lim_{z \rightarrow k} f(z) = f(k)$ ; pues  $k$  no es un polo de  $f$  y  $f$  es meromorfa

Asi tenemos  $\lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi f(z) \operatorname{ctg}(\pi z) = f(k)$  con  $f(k) \neq 0$  por hip\^o tesis

ii/ Tenemos que

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma_N} |\pi f(z) \cot \pi z| L(\gamma_N) \quad ) 0.5$$
$$\leq \pi \sup_{z \in \gamma_N} |f(z)| \sup_{z \in \gamma_N} |\cot \pi z| L(\gamma_N)$$

donde  $L(\gamma_N)$  es la longitud de  $\gamma_N$ , ie  $L(\gamma_N) = \gamma(N + \frac{1}{2}) = 8N + 4$ .) 0.5

• Si  $N$  es suficientemente grande entonces  $\forall z \in \gamma_N$  tenemos  $|z| > N$

y  $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}$ . Pero en  $\gamma_N$  tenemos  $|z| > N$  y por lo tanto

$$|f(z)| \leq \frac{K}{N^p} \quad ) 0.5$$

• De un otro lado sabemos que  $|\cot \pi z| \leq A$ ,  $\forall z \in \gamma_N$

Todo eso hace que:

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cot \pi z \, dz \right| \leq \pi \frac{AK}{N^p} (8N + 4).$$

iii/ Supongamos  $N$  suficientemente grande de modo tal que todos los  
polos de  $f$  sean encerrados por  $\gamma_N$ . El teorema de los residuos  
nos da que:



(2)

$$\textcircled{0,5} \int_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz = 2\pi i \left( \sum_{k=-N}^N \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j) \right)$$

De hecho, respecto con la pregunta i),  $k \in \mathbb{Z}$  es un polo de  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$  y  $\{z_j\}_{1 \leq j \leq m}$  tambien. Ademas  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$  no tiene otro polo.

+0,25 para los explicaciones

De un otro lado, respecto la pregunta ii), cuando  $N$  tiende al infinito tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) + \sum_{j=1}^m \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j) \end{aligned}$$

Pues vemos en i) que  $\lim_{z \rightarrow k} (z-k) \pi f(z) \cotg(\pi z) = f(k)$

Asi tenemos (1).

$$b/ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \quad \text{con} \quad f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} \quad \text{libre} \quad (\textcircled{0} \leftrightarrow 0,5)$$

y de ca son 'polos' de orden 1 de  $-f$  y  $f$  satisface las hipótesis de a/. Podemos utilizar el resultado (1)



$$\begin{aligned} \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \pi \frac{\cotg(\pi z)}{(z - ai)(z + ia)} \\ &= \frac{\pi}{2ia} \cotg(i\pi a) \end{aligned}$$

libre  
(0.5)  $\leftrightarrow$  (0,75)

$$\begin{aligned} \text{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), -ia) &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \pi \frac{\cotg(\pi z)}{(z - ia)(z + ia)} \\ &= -\frac{\pi}{2ia} \cotg(-i\pi a) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2ia} \cotg(i\pi a) \quad \text{libre} \quad (0.5) \leftrightarrow (0,75)$$

Con la formula (1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} &= -\left( \frac{\pi}{ia} \cotg(i\pi a) \right) \\ &= \frac{i\pi}{a} \cotg(i\pi a) \end{aligned}$$

Otra Formulación:  $\frac{i\pi}{a} \cotg(i\pi a) = \frac{i\pi}{a} \frac{e^{-\pi a} + e^{\pi a}}{e^{-\pi a} - e^{\pi a}} \frac{2i}{2}$

$$= -\frac{\pi}{a} \frac{\cosh(\pi a)}{\sinh(\pi a)}$$

$$= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a)$$